# 数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

## 第１問　（配点　30）

〔1〕　不等式

$$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$$

を満たす $x$ の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}<x\leqq\boxed{\text{イ}}$ である。$x$ がこの範囲にあるとき

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X=2^x$ とおくと，$X$ のとる値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<X\leqq\boxed{\text{エ}}$ であり

$$y=\left(X-\boxed{\text{オ}}\right)^{\boxed{\text{カ}}}+\boxed{\text{キ}}$$

である。したがって，$y$ は $x=\boxed{\text{ク}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ をとり，$x=\log_2\boxed{\text{コ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

（数学Ⅱ第１問は６ページに続く。）

〔2〕 $a$ を $0° < a < 180°$ を満たす角度とする。 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で関数

$$f(\theta) = \sin(\theta - a) - \sin\theta$$

を考える。

(1) 方程式

$$f(\theta) = 0$$

の解 $\theta$ は $a$ を用いて

$$\theta = \boxed{\text{シス}}° + \frac{a}{2}$$

と表される。さらに，この解 $\theta$ が $\sin(\theta - a) = \frac{1}{2}$ を満たすならば

$$a = \boxed{\text{セソタ}}°$$

である。

(数学II第1問は次ページに続く。)

(2)　$a$ を(1)で求めた角度とするとき，関数 $f(\theta)$ は

$$\theta = \boxed{\text{チツテ}}^\circ \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

$$\theta = \boxed{\text{ニヌ}}^\circ \text{ のとき最小値 } -\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

をとる。

# 第２問 （配点　30）

(1)　座標平面上の放物線 $y = x^2$ を $C$ とする。$a$ は $a \neq 1$ を満たす実数とし，$C$ 上に点 $\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$ と点 $\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ をとる。２点 P，Q を通る直線を $\ell$ とすると，$\ell$ の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}}\,a + \boxed{\text{イ}}\right)x - \boxed{\text{ウ}}\,a^2 - \boxed{\text{エ}}\,a$$

である。次に，$b$ は $b \neq 1$，$b \neq a$ を満たす実数として，２点

$$\mathrm{R}(b+1,\ (b+1)^2),\ \mathrm{S}(2b,\ 4b^2)$$

を通る直線を $m$ とする。直線 $\ell$，$m$ の交点 T は

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1),\ \boxed{\text{キ}}\,ab + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1)\right)$$

である。よって，$b$ を限りなく $a$ に近づけるとき，点 T は限りなく点

$$\mathrm{U}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{サ}}\,a^2 + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

に近づく。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(2) (1)で求めた点Uは，$a$ の値によらない放物線

$$D : y = \frac{\boxed{シ}x^2 - \boxed{ス}x + \boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

上にある。さらに，点Uにおける放物線 $D$ の接線の傾きは

$\boxed{タ}a + \boxed{チ}$ である。放物線 $D$ の接線で原点Oを通るものは

$$y = x \quad と \quad y = \boxed{ツテ}x$$

の二つである。

(3) 二つの放物線 $C$，$D$ の共有点の座標は $\left(\boxed{ト}, \boxed{ナ}\right)$ である。放物線 $C$，$D$ および $y$ 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。

# 第3問 (配点 20)

円 $x^2+y^2=1$ を $C$ とする。$a$ を $-\frac{1}{2}<a<0$ を満たす実数とし，点 P(2, 0) を通り，傾き $a$ の直線を $\ell$ とする。さらに，$\ell$ と $C$ の交点を A，B とし，A は第1象限にあるものとする。A，B における $C$ の二つの接線の交点を Q とする。$a$ が上の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよう。

(1) 直線 $\ell$ の方程式は $y=\boxed{\text{ア}}\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)$ であり，A，B の $x$ 座標は方程式

$$\left(a^{\boxed{\text{ウ}}}+1\right)x^2-\boxed{\text{エ}}\,a^2x+4a^2-1=0$$

の二つの解である。

(2) 線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{オ}}\,a^2}{1+a^2},\ -\frac{\boxed{\text{カ}}\,a}{1+a^2}\right)$$

であり，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$x+\boxed{\text{キ}}\,y=\boxed{\text{ク}}$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(3) 点Aの $x$ 座標を $b$ とする。このとき，点Aにおける $C$ の接線の方程式は

$$bx + a\left(\boxed{\text{ケ}} - 2\right)y = 1$$

である。Qの座標は $a$ を用いて表すと

$$\left(\frac{1}{\boxed{\text{コ}}},\ \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}\,a}\right)$$

である。これから，Qは点 $\left(\dfrac{1}{\boxed{\text{コ}}},\ 0\right)$ を通り，$y$ 軸に平行な直線上の

$y > \boxed{\text{セ}}$ の部分を動くことがわかる。

## 第4問 （配点　20）

$0 < c < 1$ を満たす $c$ に対して，座標平面上の点 $(1 - c^2,\ 0)$ を P とする。

(1) 原点 O と点 P を通る放物線 $y = mx(x + c^2 - 1)$ で，直線 $y = -x + 1$ に接するものを求めよう。この放物線が直線 $y = -x + 1$ に接するから，$m$ は 2 次方程式

$$\left(\boxed{\text{ア}}^2 - \boxed{\text{イ}}\right)^2 m^2 + 2\left(\boxed{\text{ウ}}^2 + \boxed{\text{エ}}\right)m + 1 = 0$$

を満たす。よって求める放物線は

$$C_1 : y = \frac{-1}{c^2 + \boxed{\text{オ}}\,c + \boxed{\text{カ}}}\,x(x + c^2 - 1)$$

と

$$C_2 : y = \frac{-1}{c^2 - \boxed{\text{オ}}\,c + \boxed{\text{カ}}}\,x(x + c^2 - 1)$$

の二つである。

放物線 $C_1$ と直線 $y = -x + 1$ の接点の $x$ 座標は $\boxed{\text{キ}} + c$ である。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) (1)で求めた二つの放物線 $C_1$, $C_2$ で囲まれた部分の面積 $S$ は

$$S=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(c-\boxed{\text{コ}}\right)^{\boxed{\text{サ}}}$$

である。面積 $S$ は，Pの $x$ 座標が $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$

をとる。