数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第1問 (配点　30)

〔1〕 座標平面上の3点

$$A(-1,\ 0),\ B(\cos\theta,\ \sin\theta),\ C(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$$

について，θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき

$$d = AC + BC$$

の最大値と最小値を求めよう。

(1)

$$AC^2 = \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta$$

$$= \boxed{\text{イ}}\cos^2\theta$$

$$BC^2 = \boxed{\text{ウ}} - 2\cos\theta$$

$$= \boxed{\text{エ}}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

であるから

$$d = \boxed{\text{オ}}\,|\cos\theta| + \boxed{\text{カ}}\sin\frac{\theta}{2}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

(2) $t = \sin\frac{\theta}{2}$ とおく。

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$d = -\boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t + 2$ である。

$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq t \leqq 1$ であり，$d = \boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t - 2$ である。

したがって，d は $t = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{セソ}}°$ である。また，d は $t = \boxed{\text{タ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{チ}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{ツテト}}°$ である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

〔2〕 x, y, z は正の数で $2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしているとする。このとき

$$a = 2x,\quad b = \frac{5}{2}y,\quad c = 3z$$

とおき，a, b, c の大小関係を調べよう。

(1) $x = y\left(\log_2 \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\right)$ であるから

$$b - a = y\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2} - 2\log_2 \boxed{\text{ナ}}\right)$$

である。したがって，a と b を比べると $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2) $x = z\log_2 \boxed{\text{ノ}}$ であるから

$$c - a = z\left(3 - 2\log_2 \boxed{\text{ノ}}\right)$$

である。したがって，a と c を比べると $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3) $3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，a, b, c の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フ}} < \boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

第2問 (配点 30)

a を定数とし，放物線

$$y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$$

を C，その頂点を P とする。

(1) 頂点 P の座標は

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}}\,a^2 \right)$$

である。したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は

$$y = x^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}\,x^2$$

のグラフ上にある。

(2) a が $-3 \leqq a < 1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大となるのは $a = \boxed{\text{キ}}$ と $a = \boxed{\text{クケ}}$ のときであり，最小となるのは $a = \boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3) a の値を(2)で求めた $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{クケ}}$，$\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする。放物線 C_2，C_3 の方程式は

$$C_2 : y = x^2 - \boxed{\text{シ}}\,x + \boxed{\text{ス}}$$

$$C_3 : y = x^2 - \boxed{\text{セ}}\,x$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

このとき

C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$

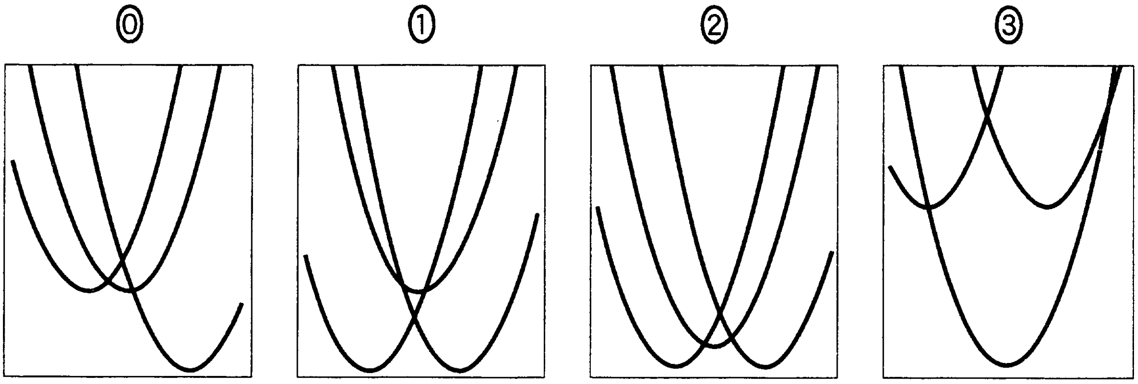
C_1 と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$

C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{2}$

である。

(4) C_1, C_2, C_3 を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，下の図⓪～③のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

三つの放物線 C_1, C_2, C_3 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。



第3問 （配点　20）

円 $x^2 + y^2 = 1$ を C_0 とし，C_0 を x 軸の正の方向に $2a$ だけ平行移動した円を C_1 とする。ただし，a は $0 < a < 1$ とする。また，C_0 と C_1 の二つの交点のうち第1象限にある方を A，もう一方を B とする。

(1)　円 C_1 の方程式は $\left(x - \boxed{\text{アイ}}\right)^2 + y^2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　P$(u,\ v)$ を2点 A，B と異なる C_0 上の点とし，三角形 PAB の重心を G とする。G の座標は

$$\left(\frac{u + \boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \frac{v}{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

である。これにより，P が C_0 から2点 A，B を除いた部分を動くときの G の軌跡は，方程式

$$\left(x - \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a\right)^2 + y^2 = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

で与えられる円 D から2点

$$\left(\boxed{\text{サ}},\ \frac{\sqrt{1 - \boxed{\text{シ}}^2}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

と

$$\left(\boxed{\text{サ}},\ -\frac{\sqrt{1 - \boxed{\text{シ}}^2}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

を除いた部分であることがわかる。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(3) 点Aにおける円 C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$-ax+\sqrt{1-\boxed{\text{シ}}^{2}}\,y+\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}-1=0$$

である。D の中心と ℓ の距離は

$$\frac{\left|\boxed{\text{タ}}\,a^2-\boxed{\text{チ}}\right|}{3}$$

であるから，D と ℓ が共有点をもたないような a の値の範囲は

$$0<a<\frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

第4問 （配点　20）

放物線 $y = x^2$ を C とし，放物線 $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ を D とする。放物線 D は点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を通り，さらに，D の点 P における接線 m は C の点 P における接線 ℓ に直交しているとする。

(1)　接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{ア}}\,x - \boxed{\text{イ}}$$

である。接線 ℓ と m は直交しているから，b は a を用いて

$$b = -\boxed{\text{ウ}}\,a - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

と表される。さらに，放物線 D が点 P を通るから，c は a を用いて

$$c = \boxed{\text{カ}} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

と表される。①，②から，放物線 D の頂点 Q は a を用いて

$$\mathrm{Q}\left(1 + \frac{1}{\boxed{\text{ク}}\,a},\ \boxed{\text{ケ}} - \frac{1}{\boxed{\text{コサ}}\,a}\right)$$

と表される。したがって，a の値が変化するとき，頂点 Q は直線

$$y = -\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\,x + \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上を動く。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2) 点Qが放物線 C 上の点となるのは，$a = \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときである。このとき，放物線 C の $x \geqq 0$ の部分と放物線 D の $x \geqq 0$ の部分および y 軸によって囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{108}$ である。