数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第1問 (配点　30)

〔1〕 不等式

$$\sin 2x > \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

を満たす x の範囲を求めよう。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。

$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと，与えられた不等式は

$$\boxed{\text{ア}}\,ab+\boxed{\text{イ}}\,a-\boxed{\text{ウ}}\,b-1>0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}<x<\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi<x<\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である。

(数学Ⅱ第1問は6ページに続く。)

〔2〕 不等式

$$2+\log_{\sqrt{y}}3<\log_y 81+2\log_y\left(1-\frac{x}{2}\right)$$

の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y>$ $\boxed{\text{サ}}$，$y\neq$ $\boxed{\text{シ}}$ である。真数は正であるから $x<$ $\boxed{\text{ス}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

また

$$\log_{\sqrt{y}}3=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y},\quad \log_y 81=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$$

であるから，与えられた不等式は

$$1<\frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y}+\frac{\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

となる。よって

$y>$ $\boxed{\text{チ}}$ のとき，$\log_3 y<\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$

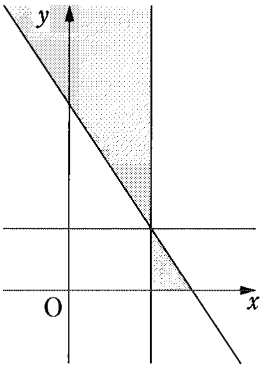
$\boxed{\text{テ}}<y<\boxed{\text{チ}}$ のとき，$\log_3 y>\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$

となる。

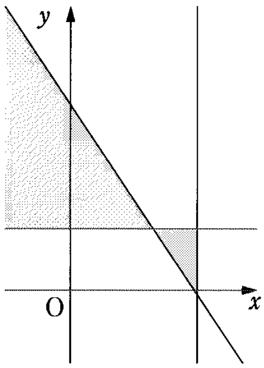
(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

求める領域を図示すると，次の図 $\boxed{\text{ト}}$ の影をつけた部分となる。ただし，境界(境界線)は含まない。 $\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

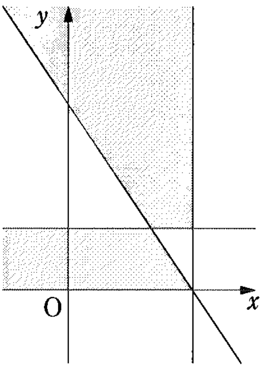
⓪



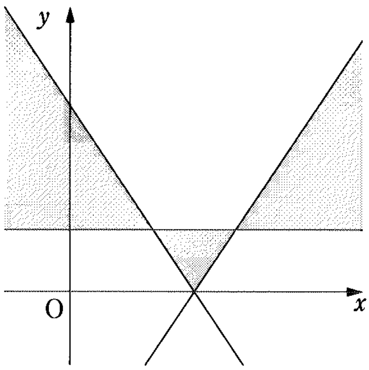
①



②



③



第2問 （配点　30）

$a > 0$ として，x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = x^3 - x$$

$$g(x) = f(x-a) + 2a$$

とする。

(1)　二つの関数の差 $g(x) - f(x)$ は

$$g(x) - f(x) = a\left(\boxed{\text{アイ}}\,x^2 + \boxed{\text{ウ}}\,ax - a^2 + \boxed{\text{エ}}\right)$$

と表され，x の方程式 $g(x) - f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつような a の範囲は

$$0 < a < \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

また，$g(x) - f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最大値

$$\frac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}} - a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$$

をとる。

（数学Ⅱ第2問は次ページに続く。）

(2) (1)で得られた最大値を

$$h(a)=\frac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$$

と表す。$h(a)$をaの関数と考えるとき，$h(a)$は$a=\boxed{\text{ス}}$で最大値$\boxed{\text{セ}}$をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$のとき，曲線$y=f(x)$と曲線$y=g(x)$の二つの交点P，Qの座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}},\ 0\right),\quad \mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

であり，二つの曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

さらに，交点$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}},\ 0\right)$における曲線$y=f(x)$の接線と曲線$y=g(x)$の接線がなす角を$\theta\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とすると

$$\tan\theta=\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

である。

第3問 （配点　20）

aは実数で，$a>0$，$a \neq 2$とし，点A$(a,\ 1)$を中心とする半径1の円をCとする。また，点P$(2,\ 0)$を通り円Cに接する直線のうちx軸でないものをℓ_1とし，点Q$(-2,\ 0)$を通り円Cに接する直線のうちx軸でないものをℓ_2とする。ℓ_1とℓ_2が垂直であるときのaの値を求めよう。

円Cの方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$$

である。

直線ℓ_1，ℓ_2の傾きをそれぞれb，cとすると，それらの方程式は

$$\ell_1 : y=\boxed{\text{エ}}\left(x-\boxed{\text{オ}}\right)$$
$$\ell_2 : y=\boxed{\text{カ}}\left(x+\boxed{\text{キ}}\right)$$

と表される。また，ℓ_1とℓ_2が垂直であるから

$$bc=\boxed{\text{クケ}}$$

である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

直線 ℓ_1 は円 C に接することから

$$\boxed{\text{エ}}\left(a-\boxed{\text{コ}}\right)\left(a-\boxed{\text{サ}}\right)=2\left(a-\boxed{\text{シ}}\right)$$

が成り立つ。$\left(\boxed{\text{コ}}\right.$ と $\boxed{\text{サ}}$ は解答の順序を問わない。$\left.\right)$

同様に，直線 ℓ_2 が円 C に接することから

$$\boxed{\text{カ}}\left(a+\boxed{\text{ス}}\right)\left(a+\boxed{\text{セ}}\right)=2\left(a+\boxed{\text{ソ}}\right)$$

が成り立つ。$\left(\boxed{\text{ス}}\right.$ と $\boxed{\text{セ}}$ は解答の順序を問わない。$\left.\right)$

したがって，$bc=\boxed{\text{クケ}}$ より

$$a=\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

このとき，ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とすると，円 C と三角形 PQR について，$\boxed{\text{チ}}$。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 円 C と三角形 PQR の周との共有点は 1 個である

① 円 C と三角形 PQR の周との共有点は 2 個である

② 円 C は三角形 PQR の三つの頂点 P，Q，R を通る

③ 円 C は三角形 PQR の 3 辺 PQ，QR，RP に接する

数学Ⅱ

第４問　（配点　20）

a，b を実数とし，$a \neq 0$ とする。x の整式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + bx^2 + (2b - 3)x - a$$

とし，$P(a) = 0$ が成り立つとする。

(1)　$P(a) = 0$ より，a と b の間には関係式

$$a^2 + \boxed{\text{ア}}\,a + \boxed{\text{イウ}} - \boxed{\text{エ}} = 0$$

が成り立つ。したがって，$a = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}$ または $a = \boxed{\text{キク}}$ である。

(2)　$a = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}$ のとき，３次方程式 $P(x) = 0$ は a，b の値によらない解 $x = \boxed{\text{ケコ}}$ をもつ。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(3) $a = \boxed{\text{キク}}$ とする。このとき，$P(x)$ を因数分解すると

$$P(x) = \left(x + \boxed{\text{サ}}\right)\left\{x^2 + \left(\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}\right)x + \boxed{\text{セ}}\right\}$$

となる。

3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような b の範囲は

$$\boxed{\text{ソ}} < b < \boxed{\text{タ}}$$

である。このとき，一つの虚数解が $c + \dfrac{3}{5}i$ (c は実数)ならば，c の値は

$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ または $-\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

方程式 $P(x) = 0$ の解がすべて実数であるような b の範囲は，$b \leqq \boxed{\text{ソ}}$ または $b \geqq \boxed{\text{タ}}$ である。このとき，三つの解の和が $\dfrac{4}{3}$ ならば，それらの解は $\boxed{\text{テト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。