数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕

(1)　$8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，$\log_{27}\dfrac{1}{9} = \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　$y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　同一のもの　　　①　x 軸に関して対称

②　y 軸に関して対称　　　③　直線 $y = x$ に関して対称

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき，$y = t^2 - \boxed{\text{コ}}\, t + \boxed{\text{サ}}$ である。また，x が $x > 0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $t > 0$　　① $t > 1$

② $t > 0$ かつ $t \neq 1$　　③ 実数全体

したがって，y は $t = \boxed{\text{ス}}$ のとき，すなわち $x = \boxed{\text{セ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

〔2〕 k を正の定数として

$$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x について考える。

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x の個数について考えよう。

①の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ，2倍角の公式を用いて変形すると

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{チ}}} - k\right)\cos 2x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。したがって，k の値に関係なく，$x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときはつねに①が成り立つ。また，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leqq 1$ であるから，$k > \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，①を満たす x は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ツ}}}$ のみである。一方，$0 < k < \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，①を満たす x の個数は $\boxed{\text{ナ}}$ 個であり，$k = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときは $\boxed{\text{ニ}}$ 個である。

（数学Ⅱ第1問は次ページに続く。）

(2) $k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により $\sin 2x=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ であるから

$$\cos 2x=\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。したがって

$$\cos x=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

第2問 (配点　30)

座標平面上で，放物線$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$を$C_1$とし，放物線$y=\frac{1}{4}x^2$を$C_2$とする。

(1)　実数aに対して，2直線$x=a$，$x=a+1$とC_1，C_2で囲まれた図形Dの面積Sは

$$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{\boxed{ア}}x^2+\frac{1}{\boxed{イ}}\right)dx$$

$$=\frac{a^2}{\boxed{ウ}}+\frac{a}{\boxed{エ}}+\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}$$

である。Sは$a=\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$で最小値$\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}}$をとる。

(2)　4点$(a,0)$，$(a+1,0)$，$(a+1,1)$，$(a,1)$を頂点とする正方形をRで表す。aが$a\geqq 0$の範囲を動くとき，正方形Rと(1)の図形Dの共通部分の面積をTとおく。Tが最大となるaの値を求めよう。

直線$y=1$は，C_1と$\left(\pm\boxed{ソ},1\right)$で，$C_2$と$\left(\pm\boxed{タ},1\right)$で交わる。したがって，正方形$R$と図形$D$の共通部分が空集合にならないのは，$0\leqq a\leqq\boxed{チ}$のときである。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ソ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲で a が増加するとき，T は $\boxed{\text{ツ}}$。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ。

⓪ 増加する　　① 減少する　　② 変化しない

したがって，T が最大になる a の値は，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ の範囲にある。

$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ のとき，(1)の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U = \frac{a^3}{\boxed{\text{テ}}} + \frac{a^2}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。よって，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ソ}}$ において

$$T = -\frac{a^3}{\boxed{\text{ナ}}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{ニ}}} + \frac{a}{\boxed{\text{ヌ}}} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。① の右辺の増減を調べることにより，T は

$$a = \frac{\boxed{\text{ネノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

で最大値をとることがわかる。

数学Ⅱ

第3問 （配点　20）

座標平面上に4点A(－1，0)，B(1，0)，P(－1，3)，Q(1，1)がある。線分PQ上に点Rをとり，そのx座標をaとする。さらに，三角形ABRの外接円をCとし，その中心をSとする。

(1)　点Rの座標をaを用いて表すと

$$\left(a,\quad \boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

である。

また，線分ARの中点をMとする。Mの座標をaを用いて表すと

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \frac{\boxed{\text{キク}}+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(2) 外接円 C の中心 S は，線分 AB の垂直二等分線と，線分 AR の垂直二等分線 ℓ との交点である。このことを用いて S の座標を求めよう。

線分 AB の垂直二等分線は y 軸である。また，ℓ は，(1)の点 M を通り，傾き $\dfrac{a + \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}}}$ の直線である。

以上のことから，S の座標は

$$\left(\boxed{\text{セ}},\quad \frac{\boxed{\text{ソタ}}\,a^2 + \boxed{\text{チ}}\,a - \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a - \boxed{\text{ト}}} \right)$$

であることがわかる。

(3) 円 C が点 R で直線 PQ に接するときの a の値を求めよう。

C が直線 PQ に接するとき，直線 RS の傾きは $\boxed{\text{ナ}}$ である。このことと，$-1 \leqq a \leqq 1$ であることから，$a = \dfrac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

第４問 （配点　20）

(1)　4 次方程式 $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$ の解を求めよう。

　$t = x^2$ とおいて得られる 2 次方程式 $t^2 + 2t + 25 = 0$ の判別式を D とするとき

$$D = \boxed{\text{アイウ}}$$

であり，2 次方程式の解は

$$t = \boxed{\text{エオ}} \pm \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\, i$$

である。2 乗すると虚数 t になる複素数を求める代わりに，以下のように考える。

　上の 4 次方程式を，正の実数 A，B により $(x^2 + A)^2 - Bx^2 = 0$ と変形すると

$$A = \boxed{\text{ク}}, \quad B = \boxed{\text{ケ}}$$

である。

　したがって，等式

$$(x^2 + A)^2 - Bx^2 = (x^2 + \sqrt{B}\,x + A)(x^2 - \sqrt{B}\,x + A)$$

を利用すると，4 次方程式 $x^4 + 2x^2 + 25 = 0$ の解は

$$x = -\sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\, i, \quad \sqrt{\boxed{\text{コ}}} \pm \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\, i$$

であることがわかる。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

(2)　q，rを実数として，整式$P(x) = x^3 - 2x^2 + qx + 2r$を考える。3次方程式$P(x) = 0$の解が$-2$と二つの自然数$\alpha$，$\beta$ $(\alpha < \beta)$であるとき，α，βとq，rを求めよう。

$P(-2) = 0$であるから，$r = q + \boxed{\text{シ}}$である。したがって，因数定理により

$$P(x) = (x+2)\left(x^2 - \boxed{\text{ス}}\,x + q + \boxed{\text{セ}}\right)$$

となる。

ここで，2次方程式

$$x^2 - \boxed{\text{ス}}\,x + q + \boxed{\text{セ}} = 0$$

は，二つの自然数α，β $(\alpha < \beta)$を解にもつから

$$\alpha = \boxed{\text{ソ}},\quad \beta = \boxed{\text{タ}},\quad q = \boxed{\text{チツ}},\quad r = \boxed{\text{テ}}$$

である。