

数 学 II

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 30)

[1] 関数 $f(\theta) = 3 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$ を考える。

(1) $f(0) = \boxed{\text{アイ}}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると, $\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ とな

る。さらに, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}} \sin 2\theta - \boxed{\text{ク}} \cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

(数学 II 第 1 問は次ページに続く。)

- (3) θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき、関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると、①は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって、 $m = \boxed{\text{ス}}$ である。

また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ において、 $f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は、小さい

順に、 $\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ 、 $\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

数学Ⅱ

〔2〕 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \dots\dots\dots ② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

を満たす実数 x, y を求めよう。

真数の条件により、 x, y のとり得る値の範囲は である。 に当てはまるものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

- ① $x > 0, y > 0$ ② $x > 2, y > 3$ ③ $x > -2, y > -3$
④ $x < 0, y < 0$ ⑤ $x < 2, y < 3$ ⑥ $x < -2, y < -3$

底の変換公式により

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\input{type="text" value="チ"}}$$

である。よって、②から

$$y = \input{type="text" value="ツ"}x + \input{type="text" value="テ"} \dots\dots\dots ④$$

が得られる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

次に、 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき、④を用いて③を t の方程式に書き直すと

$$t^2 - \boxed{\text{トナ}} t + \boxed{\text{ニヌ}} = 0 \quad \dots\dots\dots \text{⑤}$$

が得られる。また、 x が $\boxed{\text{タ}}$ における x の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}} < t < \boxed{\text{ノ}} \quad \dots\dots\dots \text{⑥}$$

である。

⑥の範囲で方程式⑤を解くと、 $t = \boxed{\text{ハ}}$ となる。したがって、連立方程式②、③を満たす実数 x 、 y の値は

$$x = \log_3 \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}, \quad y = \log_3 \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

であることがわかる。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

p, q を実数とし、関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 をとるとする。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C 、放物線 $y = -kx^2$ を D 、放物線 D 上の点 $(a, -ka^2)$ を A とする。ただし、 $k > 0, a > 0$ である。

(1) 関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので、 $f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ である。これと $f(-1) = 2$ より、 $p = \boxed{\text{イ}}$ 、 $q = \boxed{\text{ウエ}}$ である。よって、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

(2) 点 A における放物線 D の接線を ℓ とする。 D と ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}} kax + ka \boxed{\text{コ}} \dots\dots\dots \text{①}$$

と表せる。 ℓ と x 軸の交点の x 座標は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり、 D と x 軸および

直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積は $\frac{k}{\boxed{\text{ス}}} a \boxed{\text{セ}}$ である。よって、

$$S = \frac{k}{\boxed{\text{ソタ}}} a \boxed{\text{セ}}$$

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

- (3) さらに、点 A が曲線 C 上にあり、かつ (2) の接線 l が C にも接するとする。
 このときの (2) の S の値を求めよう。

A が C 上にあるので、 $k = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}$ である。

l と C の接点の x 座標を b とすると、 l の方程式は b を用いて

$$y = \boxed{\text{ト}} (b^2 - \boxed{\text{ナ}})x - \boxed{\text{ニ}} b^3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。②の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x) - g(x) = (x - \boxed{\text{ヌ}})^2 (x + \boxed{\text{ネ}} b)$$

と因数分解されるので、 $a = -\boxed{\text{ネ}} b$ となる。①と②の表す直線の傾きを

を比較することにより、 $a^2 = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

したがって、求める S の値は $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

数学Ⅱ

第3問 (配点 20)

座標平面上に2点A(-4, -1), B(2, 2)がある。

- (1) 2点A, Bを通る直線の方程式は $x - \boxed{\text{ア}}y + \boxed{\text{イ}} = 0$ である。
- (2) 線分ABを2:1に内分する点の座標は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ で、線分ABを2:1に外分する点の座標は $(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}})$ である。
- (3) 2点A, Bからの距離の比が2:1である点Pの軌跡を求めよう。

Pの座標を (x, y) とすると

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = \boxed{\text{キ}} \{(x-2)^2 + (y-2)^2\}$$

である。この式を整理すると

$$x^2 + y^2 - \boxed{\text{ク}}x - \boxed{\text{ケ}}y + \boxed{\text{コ}} = 0$$

となる。よって、求める軌跡は、中心が点 $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$ 、半径が

$\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ の円である。この円をCとする。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(4) (3)で求めた円 C と y 軸との交点の座標は $(0, \boxed{\text{ソ}})$, $(0, \boxed{\text{タ}})$

である。ただし, $\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}}$ とする。

点 $(0, \boxed{\text{ソ}})$, $(0, \boxed{\text{タ}})$ における C の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とする。 l_1 の方程式は $y = \boxed{\text{チツ}}x + \boxed{\text{テ}}$ であり, l_2 の方程式は $y = \boxed{\text{ト}}x + \boxed{\text{ナ}}$ である。したがって, y 軸と 2 直線 l_1 , l_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{ニ}}$ である。

数学Ⅱ

第4問 (配点 20)

4次の整式 $P(x)$ を考える。 $P(x)$ の x^4 の係数は1であり、その他の項の係数は実数であるとする。また、4次方程式 $P(x)=0$ は実数解 $-1, 3$ をもち、それ以外の実数解をもたないとする。

因数定理により、 $P(x)$ は $x + \boxed{\text{ア}}$ と $x - \boxed{\text{イ}}$ で割り切れるから

$$P(x) = (x + \boxed{\text{ア}})(x - \boxed{\text{イ}})(x^2 + ax + b)$$

と表せる。以下、 $Q(x) = x^2 + ax + b$ とする。

- (1) 4次方程式 $P(x)=0$ は、実数解 $-1, 3$ の他に、異なる二つの虚数解 α, β をもつとする。このとき、 α, β は2次方程式 $Q(x)=0$ の解であるから、解と係数の関係により、 $\alpha + \beta = \boxed{\text{ウエ}}$ 、 $\alpha\beta = \boxed{\text{オ}}$ である。また、 $Q(x)=0$ の判別式を D とすると、 $D = a^{\boxed{\text{カ}}} - \boxed{\text{キ}}b$ であり、 $\boxed{\text{ク}}$ となる。 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① $D > 0$

② $D = 0$

③ $D < 0$

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) 4次方程式 $P(x) = 0$ は虚数解をもたないとする。このとき、 $P(x) = 0$ は $-1, 3$ のみを解にもつので、 $Q(x)$ について、次の三つの場合が考えられる。

$$Q(x) = x^2 + \boxed{\text{ケ}}x + \boxed{\text{コ}} \text{ で、 } Q(x) \text{ の値は } \boxed{\text{サ}}$$

$$Q(x) = x^2 - \boxed{\text{シ}}x + \boxed{\text{ス}} \text{ で、 } Q(x) \text{ の値は } \boxed{\text{セ}}$$

$$Q(x) = x^2 - \boxed{\text{ソ}}x - \boxed{\text{タ}} \text{ で、 } Q(x) \text{ の値は } \boxed{\text{チ}}$$

ただし、 $\boxed{\text{サ}}$ 、 $\boxed{\text{セ}}$ 、 $\boxed{\text{チ}}$ については、当てはまるものを、次の

①～⑤のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① すべての実数 x で正となる
- ② $x = -1$ のとき 0 となり、その他の実数 x で正となる
- ③ $x = 3$ のとき 0 となり、その他の実数 x で正となる
- ④ $x = -1$ と $x = 3$ のとき 0 となり、その他の実数 x で正となる
- ⑤ $-1 < x < 3$ を満たす x で正となり、その他の実数 x で 0 以下となる
- ⑥ $-1 < x < 3$ を満たす x で負となり、その他の実数 x で 0 以上となる

(3) 整式 $P(x)$ がすべての実数 x で 0 以上の値をとるとき、因数 $x + \boxed{\text{ア}}$ と $x - \boxed{\text{イ}}$ のとる値の正負を考えると

$$P(x) = x^4 - \boxed{\text{ツ}}x^3 - \boxed{\text{テ}}x^2 + \boxed{\text{トナ}}x + \boxed{\text{ニ}}$$

であることがわかる。

問題と解答は、独立行政法人 大学入試センターホームページより転載しています。
ただし、著作権上の都合により、一部の問題・画像を省略しています。